

Definição de Limite

Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Cleibson Silva

Instituto Federal de Pernambuco – Campus Caruaru

Definição Intuitiva de Limite

Dada uma função real f , estamos interessados em saber o que acontece com o valor de $f(x)$ quando x se aproxima de um ponto c sem, entretanto, assumir este valor.

Definição Intuitiva de Limite

Dada uma função real f , estamos interessados em saber o que acontece com o valor de $f(x)$ quando x se aproxima de um ponto c sem, entretanto, assumir este valor.

Definição 1.1 (Limite)

Seja f uma função real definida perto de $c \in \mathbb{R}$ (mas não necessariamente definida em c). Dizemos que o **limite de $f(x)$ quando x tende a c é igual a $L \in \mathbb{R}$** , denotado por:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \rightarrow L \text{ quando } x \rightarrow c$$

se $f(x)$ fica tão próximo de L quanto quisermos para todo x suficientemente próximo de c , mas $x \neq c$.

Definição Intuitiva de Limite

Dada uma função real f , estamos interessados em saber o que acontece com o valor de $f(x)$ quando x se aproxima de um ponto c sem, entretanto, assumir este valor.

Definição 1.1 (Limite)

Seja f uma função real definida perto de $c \in \mathbb{R}$ (mas não necessariamente definida em c). Dizemos que o **limite de $f(x)$ quando x tende a c é igual a $L \in \mathbb{R}$** , denotado por:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \rightarrow L \text{ quando } x \rightarrow c$$

se $f(x)$ fica tão próximo de L quanto quisermos para todo x suficientemente próximo de c , mas $x \neq c$.

Observação: O valor da função no ponto $f(c)$ não importa para o cálculo do limite!

Definição 1.2 (Limites Laterais pela Direita e Esquerda)

Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a c pela ****direita**** (ou ****esquerda****) é L , denotado por:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L \quad (x > c) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \quad (x < c)$$

Definição 1.2 (Limites Laterais pela Direita e Esquerda)

Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a c pela ****direita**** (ou ****esquerda****) é L , denotado por:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L \quad (x > c) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \quad (x < c)$$

Lema 1.3 (Relação com Limites Laterais)

Existe $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ se, e somente se, existem os limites laterais e eles são iguais:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

Exemplo 1.1: Furos no Domínio e Cancelamento

Exemplo 1.1

Esboce o gráfico e determine (caso exista):

❶ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x}$

Exemplo 1.1: Furos no Domínio e Cancelamento

Exemplo 1.1

Esboce o gráfico e determine (caso exista):

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x}$

Exemplo 1.1: Furos no Domínio e Cancelamento

Exemplo 1.1

Esboce o gráfico e determine (caso exista):

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2}{x}$

Exemplo 1.1: Furos no Domínio e Cancelamento

Exemplo 1.1

Esboce o gráfico e determine (caso exista):

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$

Exemplo 1.1: Furos no Domínio e Cancelamento

Exemplo 1.1

Esboce o gráfico e determine (caso exista):

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x^2}$

Exemplo 1.1: Furos no Domínio e Cancelamento

Exemplo 1.1

Esboce o gráfico e determine (caso exista):

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x^2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2}$

Exemplo 1.2: Funções Definidas por Partes

Exemplo 1.2

Para cada item abaixo, esboce o gráfico de $f(x)$ e determine (caso existam) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$:

❶ $c = 0, 1, 0.9999, 1.0001$ de $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ -3, & x \geq 1 \end{cases}$

Exemplo 1.2: Funções Definidas por Partes

Exemplo 1.2

Para cada item abaixo, esboce o gráfico de $f(x)$ e determine (caso existam) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$:

a) $c = 0, 1, 0.9999, 1.0001$ de $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ -3, & x \geq 1 \end{cases}$

b) $c = 2, 0$ de $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x}, & x \neq 0 \\ -2, & x = 0 \end{cases}$

Exemplo 1.2: Funções Definidas por Partes

Exemplo 1.2

Para cada item abaixo, esboce o gráfico de $f(x)$ e determine (caso existam) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$:

a) $c = 0, 1, 0.9999, 1.0001$ de $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ -3, & x \geq 1 \end{cases}$

b) $c = 2, 0$ de $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x}, & x \neq 0 \\ -2, & x = 0 \end{cases}$

c) $c = 0.0001, -0.0001, 0$ de $f(x) = \begin{cases} -1, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$

Exemplo 1.2: Funções Definidas por Partes

Exemplo 1.2

Para cada item abaixo, esboce o gráfico de $f(x)$ e determine (caso existam) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$:

a) $c = 0, 1, 0.9999, 1.0001$ de $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ -3, & x \geq 1 \end{cases}$

b) $c = 2, 0$ de $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x}, & x \neq 0 \\ -2, & x = 0 \end{cases}$

c) $c = 0.0001, -0.0001, 0$ de $f(x) = \begin{cases} -1, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$

d) $c = 0.99, 1.01, 1$ de $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 4 - x, & x > 1 \end{cases}$

Exemplo 1.3: Indeterminações do Tipo 0/0

Exemplo 1.3

Determine os limites:

$$\textcircled{a} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

Exemplo 1.3: Indeterminações do Tipo 0/0

Exemplo 1.3

Determine os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

Exemplo 1.3: Indeterminações do Tipo 0/0

Exemplo 1.3

Determine os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

c) $\lim_{y \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{3}}{y - 3}$

Exemplo 1.3: Indeterminações do Tipo 0/0

Exemplo 1.3

Determine os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

c) $\lim_{y \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{3}}{y - 3}$

d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

Exemplo 1.3: Indeterminações do Tipo 0/0

Exemplo 1.3

Determine os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

c) $\lim_{y \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{3}}{y - 3}$

d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

e) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - t^3 + t - 1}{t^2 - 2t + 1}$

Exemplo 1.3: Indeterminações do Tipo 0/0

Exemplo 1.3

Determine os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

c) $\lim_{y \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{3}}{y - 3}$

d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

e) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - t^3 + t - 1}{t^2 - 2t + 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ se $f(x) = \begin{cases} \frac{x^6 - 1}{x + 1}, & x \neq -1 \\ 4, & x = -1 \end{cases}$

Exemplos 1.4 e 1.5: Função Módulo e Racionalização

Exemplo 1.4 (Módulo)

Esboce o gráfico e determine (caso exista):

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} |x^2 - 9|$

d) $\lim_{x \rightarrow -3} |x^2 - 9|$

d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x^2 - 9|}{x + 3}$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin(x)}{|\sin(x)|}$

Exemplos 1.4 e 1.5: Função Módulo e Racionalização

Exemplo 1.4 (Módulo)

Esboce o gráfico e determine (caso exista):

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} |x^2 - 9|$

d) $\lim_{x \rightarrow -3} |x^2 - 9|$

d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x^2 - 9|}{x + 3}$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin(x)}{|\sin(x)|}$

Exemplo 1.5 (Racionalização)

Determine os limites: (a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+1}-1}{h}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

Exemplos 1.6 e 1.7: Funções Compostas e Exponenciais

Exemplo 1.6

Esboce o gráfico de $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2}, & |x| \leq 3 \\ x, & x > 3 \\ 0, & x < -3 \end{cases}$ e determine os limites laterais em $c = 3$ e $c = -3$.

Exemplos 1.6 e 1.7: Funções Compostas e Exponenciais

Exemplo 1.6

Esboce o gráfico de $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2}, & |x| \leq 3 \\ x, & x > 3 \\ 0, & x < -3 \end{cases}$ e determine os limites laterais em $c = 3$ e $c = -3$.

Exemplo 1.7

Esboce o gráfico e determine $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ para:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & 0 < x < 1 \\ \ln(x), & x \geq 1 \end{cases}$$

Exemplos 1.9 a 1.11: Funções Especiais e Oscilações

Exemplo 1.9 ($\sin(1/x)$)

Para $f(x) = \sin(1/x)$: (a) Onde $f(x) = 0$? (b) Onde $f(x) = \pm 1$? (c) Esboce o gráfico e calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$.

Exemplos 1.9 a 1.11: Funções Especiais e Oscilações

Exemplo 1.9 ($\sin(1/x)$)

Para $f(x) = \sin(1/x)$: (a) Onde $f(x) = 0$? (b) Onde $f(x) = \pm 1$? (c) Esboce o gráfico e calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$.

Exemplos 1.10 e 1.11 (Função Indicadora e Parte Inteira)

- **Exemplo 1.10:** Para $I_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, calcule $\lim_{x \rightarrow \pi} I_{\mathbb{Q}}(x)$.

Exemplos 1.9 a 1.11: Funções Especiais e Oscilações

Exemplo 1.9 ($\sin(1/x)$)

Para $f(x) = \sin(1/x)$: (a) Onde $f(x) = 0$? (b) Onde $f(x) = \pm 1$? (c) Esboce o gráfico e calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$.

Exemplos 1.10 e 1.11 (Função Indicadora e Parte Inteira)

- **Exemplo 1.10:** Para $I_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, calcule $\lim_{x \rightarrow \pi} I_{\mathbb{Q}}(x)$.
- **Exemplo 1.11:** Esboce $f(x) = \lfloor x \rfloor$ e determine $\lim_{x \rightarrow 1^+} \lfloor x \rfloor$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \lfloor x \rfloor$, $\lim_{x \rightarrow 1} \lfloor x \rfloor$.

Teorema 1.6 (Propriedades Básicas)

Se os limites $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ existem, então:

- a) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- c) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$, desde que $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$.

Propriedades Operatórias dos Limites

Teorema 1.6 (Propriedades Básicas)

Se os limites $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ existem, então:

- a) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- c) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$, desde que $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$.

Corolário 1.7 (Polinômios e Racionais)

Se $p(x)$ é um polinômio, então $\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(c)$.

Referências Bibliográficas



CABRAL, Marco; GOLDSTEIN, Paulo.

Curso de Cálculo de Uma Variável.

3ª ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2014.

Seção 1.2: Definição de Limite (pp. 15–28).



STEWART, James.

Cálculo: Volume 1.

8ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

Cap. 2: Limites e Derivadas.